21　点と直線

176

(1) $\left(\dfrac{0+63+15}{3},\ \dfrac{0+0+20}{3}\right)=\left(26,\ \dfrac{20}{3}\right)$

(2)

辺 OA の垂直二等分線の方程式

$x=\dfrac{63}{2}$　・・・①

辺 OB の垂直二等分線の方程式

辺 OB の中点$\left(\dfrac{15}{2},\ 10\right)$を通り，傾きが$\dfrac{20}{15}=\dfrac{4}{3}$である OB と直交するから，

$y=-\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{15}{2}\right)+10$　・・・②

外心は各辺の垂直二等分線の交点だから，

①と②の連立方程式を解くことにより，外心の座標は$\left(\dfrac{63}{2},\ -8\right)$

(3)

△OAB の面積は，底辺を OA にとると高さが 20 だから，$\dfrac{1}{2}\cdot 63\cdot 20=630$　・・・③

また，内接円の半径を r とすると，その面積は$\dfrac{1}{2}r(\mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{AB})=\dfrac{1}{2}r(63+\mathrm{OB}+\mathrm{AB})$

これと，$\mathrm{OB}=\sqrt{15^2+20^2}=\sqrt{5^2(3^2+4^2)}=\sqrt{5^2 5^2}=25$

$\mathrm{AB}=\sqrt{(63-15)^2+(0-20)^2}=\sqrt{48^2+20^2}=\sqrt{4^2(12^2+5^2)}=\sqrt{4^2 13^2}=52$ より，

△OAB の面積は$\dfrac{1}{2}r(63+25+52)=70r$　・・・④

③＝④より，$70r=630$　$\therefore r=9$　・・・⑤

△OAB の内接円は OA すなわち x 軸と接するから内心の y 座標は内接円の半径と等しい。

したがって，内心の x 座標を a とすると，内心は$(a,\ 9)$である。

また，⑤および内心と直線 OB すなわち $4x-3y=0$ の距離より，$\dfrac{|4\cdot a-3\cdot 9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=9$

ただし，内心は△OAB の内部の点だから，$a>0$ である。

よって，$4a-27=45$ より，$a=18$

ゆえに，内心の座標は$(18,\ 9)$

(4)

点 B を通り，直線 OA と直交する直線の方程式

$x=15$　・・・⑥

点 A を通り，直線 OB と直交する直線の方程式

傾きが $\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$ である OB と直交するから，$y=-\frac{3}{4}(x-63)$　・・・⑦

⑥と⑦の連立方程式を解くことにより，垂心の座標は $(15,\ 36)$

177

(1)

①，②，③と垂直なベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a^2\\-1\end{pmatrix}$ である。したがって，3 直線がただ 1 点で交わるためにはこれら 3 つのベクトルが互いに独立であることが必要である。

$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}a^2\\-1\end{pmatrix}$ は，$a^2\geq 0$ より，互いに独立である。

$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}a\\-1\end{pmatrix}$ が互いに独立ならば $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\neq -2\begin{pmatrix}a\\-1\end{pmatrix}$ より，$a\neq -1$

$\begin{pmatrix}a^2\\-1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}a\\-1\end{pmatrix}$ が互いに独立ならば $\begin{pmatrix}a^2\\-1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}a\\-1\end{pmatrix}$ より，$a^2\neq a$ すなわち $a\neq 0$，$a\neq 1$

よって，必要条件は $a\neq -1,\ 0,\ 1$

したがって，①～③の交点の座標を $(p,\ q)$ とすると，$\begin{cases}2p+2q=7\\ap-q=1\\a^2p-q=a^2\end{cases}$　$(a\neq -1,\ 0,\ 1)$

$2p+2q=7$，$ap-q=1$ より，$2p+2q+2(ap-q)=7+2$　$\therefore p=\frac{9}{2(a+1)}$　・・・④

$a^2p-q=a^2$，$ap-q=1$ より，$a^2p-q-(ap-q)=a^2-1$　$\therefore p=\frac{a+1}{a}$　・・・⑤

④，⑤より，$\frac{9}{2(a+1)}=\frac{a+1}{a}$　よって，$(2a-1)(a-2)=0$　$\therefore a=\frac{1}{2},\ 2$

(2)

3 直線がただ 1 点で交わる，または，3 直線のうち 2 直線が平行であればよい。

3 直線がただ 1 点で交わるときの a の値は，(1)の解より，$\frac{1}{2},\ 2$

2 直線が平行となる a の値は，(1)より，$-1,\ 0,\ 1$ が考えられ，これらのうち，$a=-1$ のときは①と②が，$a=0$ のときは②と③が平行となり条件を満たすが，$a=1$ のときは②と③が同一直線となり不適。以上より，$a=-1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 2$

178

$\mathrm{AB}=c,\ \mathrm{BC}=a,\ \mathrm{CA}=b$ とおくと，

$$\begin{aligned}\left(2+\mathrm{AC}^2\right)\left(2+\mathrm{BC}^2\right)-2\mathrm{AB}^2&=\left(2+b^2\right)\left(2+a^2\right)-2c^2\\&=a^2b^2+4+2\left(a^2+b^2-c^2\right)\end{aligned}$$

ここで，$c<a+b$ より，$c^2<(a+b)^2\quad \therefore -c^2>-(a+b)^2$

よって，

$$\begin{aligned}\left(2+\mathrm{AC}^2\right)\left(2+\mathrm{BC}^2\right)-2\mathrm{AB}^2&=a^2b^2+4+2\left(a^2+b^2-c^2\right)\\&>a^2b^2+4+2\left\{a^2+b^2-(a+b)^2\right\}\\&=a^2b^2+4-4ab\\&=(ab-2)^2\\&\geq 0\end{aligned}$$

ゆえに，$\left(2+\mathrm{AC}^2\right)\left(2+\mathrm{BC}^2\right)-2\mathrm{AB}^2>0$　すなわち $2\mathrm{AB}^2<\left(2+\mathrm{AC}^2\right)\left(2+\mathrm{BC}^2\right)$

179

(1)

与式を y について整理すると，$y^2+(x-2)y-\left(ax^2+10x+8\right)=0$

これを y の 2 次方程式とみなすと，解の公式より，

$$\begin{aligned}y&=\frac{-(x-2)\pm\sqrt{(x-2)^2+4\left(ax^2+10x+8\right)}}{2}\\&=\frac{-(x-2)\pm\sqrt{(4a+1)x^2+36x+36}}{2}\end{aligned}$$

したがって，これが 2 直線を表すとき，

$(4a+1)x^2+36x+36=(px+q)^2$ となるような適当な実数 $p,\ q$ が存在すればよい。

このとき，$(4a+1)x^2+36x+36=(px+q)^2$ すなわち $(4a+1)x^2+36x+36=p^2x^2+2pqx+q^2$ は恒等式だから，$p^2=4a+1$，$2pq=36$，$q^2=36$ が成り立てばよい。

$q^2=36$ より，$q=\pm 6$

これと $2pq=36$ より，$p=\pm 3$

これを $p^2=4a+1$ に代入し，a を求めると，$a=2$

よって，与式が 2 直線を表すときの a の値は 2

(2)

$a=2$ と $y=\dfrac{-(x-2)\pm\sqrt{(4a+1)x^2+36x+36}}{2}$ より，

$$\begin{aligned}y&=\frac{-(x-2)\pm\sqrt{9x^2+36x+36}}{2}\\&=\frac{-(x-2)\pm\sqrt{(3x+6)^2}}{2}\end{aligned}$$

$=\dfrac{-(x-2)\pm|3x+6|}{2}$

$=\dfrac{-(x-2)\pm(3x+6)}{2}$

$=x+4,\ -2x-2$

よって，2 直線は $y=x+4,\ y=-2x-2$

この 2 直線の交点を B とすると，連立方程式 $\begin{cases} y=x+4 \\ y=-2x-2 \end{cases}$ を解くことにより，$\mathrm{B}(-2,\ 2)$

直線 l と直線 $y=-2x-2$ の交点は点 $\mathrm{A}(0,\ -2)$

また，直線 l と直線 $y=x+4$ の交点を $\mathrm{C}(t,\ t+4)$ とおく。

△ABC の底辺を AB とすると，$\mathrm{AB}=\sqrt{(-2-0)^2+\{2-(-2)\}^2}=2\sqrt{5}$

高さを h とすると，h は $\mathrm{C}(t,\ t+4)$ と $y=-2x-2$ すなわち $2x+y+2=0$ との距離だから，

$h=\dfrac{|2t+t+4+2|}{\sqrt{2^2+1^1}}=\dfrac{3|t+2|}{\sqrt{5}}$

よって，△ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\dfrac{3|t+2|}{\sqrt{5}}=3|t+2|$ と表せる。

これが 18 と等しいから，$3|t+2|=18$ より，$t+2=\pm 6$　$\therefore t=4,\ -8$

よって，C の座標は $(4,\ 8)$ または $(-8,\ -4)$

直線 l は A と C を通る直線だから，その方程式を求めると，

$y=\dfrac{-2-8}{0-4}x-2$，$y=\dfrac{-2-(-4)}{0-(-8)}x-2$ より，$y=\dfrac{5}{2}x-2$ または $y=\dfrac{1}{4}x-2$

180

直線 AB の傾きは $\dfrac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}=-\dfrac{1}{ab}$ だから，

点 C を通り，直線 AB と直交する直線の方程式は $y=ab(x-c)+\dfrac{1}{c}$　・・・①

点 A を通り，直線 BC と直交する直線の方程式は，同様にして，$y=bc(x-a)+\dfrac{1}{a}$　・・・②

垂心 H は①と②の交点だから，その x 座標は $ab(x-c)+\dfrac{1}{c}=bc(x-a)+\dfrac{1}{a}$ より，$x=-\dfrac{1}{abc}$

また，これと①より，$y=-abc$

よって，$\mathrm{H}\left(-\dfrac{1}{abc},\ -abc\right)$

ゆえに，H は曲線 K 上にある。

H は曲線 K 上にあるから，△ABC の場合と同様にして，

△ABH の垂心は $\left(-\dfrac{1}{ab\cdot\left(-\dfrac{1}{abc}\right)},\ -ab\cdot\left(-\dfrac{1}{abc}\right)\right)=\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$

ゆえに，△ABH の垂心は点 C に一致する。

181

(1)

$(a+bi)(x+yi)=ax-by+i(bx+ay)$ より，

$ax-by=2$ は L_1 を，$bx+ay=-3$ は L_2 を表す。

ただし，$a^2+b^2>0$ より，$a=b=0$ は成り立たない。

したがって，L_1 と L_2 はともに $x,\ y$ の 1 次式で表される。

ゆえに，L_1 と L_2 はともに直線である。

(2)

$ax-by=2$ と $bx+ay=-3$ の法線ベクトルは，それぞれ $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$

また，$\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ の内積は $ab-ba=0$

よって，$\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ は互いに垂直である。

ゆえに，L_1 と L_2 は互いに垂直である。

(3)

$ax-by=2$　・・・①

$bx+ay=-3$　・・・②

とすると，

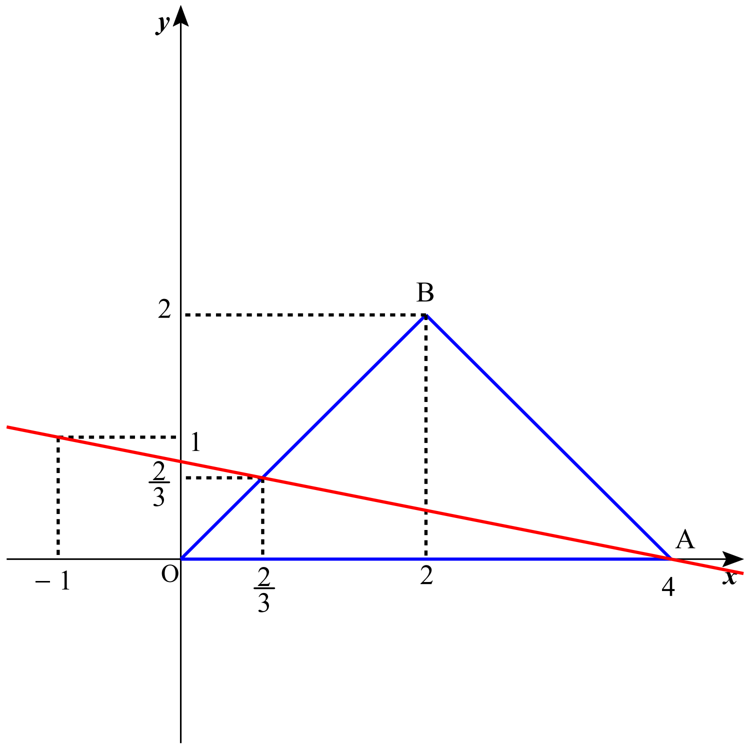
①× a +②× b より，$(a^2+b^2)x=2a-3b$　$\therefore x=\dfrac{2a-3b}{a^2+b^2}$　$(\because a^2+b^2\neq 0)$

②× a −①× b より，$(a^2+b^2)y=-3a-2b$　$\therefore y=\dfrac{-3a-2b}{a^2+b^2}$　$(\because a^2+b^2\neq 0)$

ゆえに，L_1 と L_2 の交点は $\left(\dfrac{2a-3b}{a^2+b^2},\ \dfrac{-3a-2b}{a^2+b^2}\right)$

182

直線 $y=mx+m+1$ は，$y=m(x+1)+1$ と表せることから，定点 $(-1,\ 1)$ を通る直線である。
よって，この直線が交わることができる 2 辺は OB，OA または OB，AB である。
直線が辺 OB，OA と交わるとき
△OAB が直線で 2 分されてできる x 軸側の三角形に注目すると，
A を通る直線で 2 分されたとき，その面積は最大になる。
そこで，その面積を求めると，
直線 $y=mx+m+1$ が A を通るとき，$0=4m+m+1$ より，$m=-\frac{1}{5}$
よって，A を通る直線の方程式は $y=-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$
また，この直線と辺 OB との交点の座標は，
$y=-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$ と $y=x$ $(0\leq x\leq 2)$ の連立方程式を解くことにより，$\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$
よって，面積は $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$
一方，△ABC の面積は $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$
ゆえに，2 分されてできる x 軸側の三角形の面積は△ABC の面積の半分より小さい。
したがって，直線が辺 OB，OA と交わるとき△ABC の面積は 2 等分されない。



直線が辺 OB，AB と交わるとき

B から x 軸に下ろした垂線の足を B’，

直線と辺 OB との交点を P，P から x 軸に下ろした垂線の足を P’，

直線と辺 AB との交点を Q，Q から x 軸に下ろした垂線の足を Q’とすると，

$$\frac{\Delta\mathrm{BPQ}}{\Delta\mathrm{BOA}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BO}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BA}}=\frac{\mathrm{B'P'}}{\mathrm{B'O}}\cdot\frac{\mathrm{B'Q'}}{\mathrm{B'A}}$$

したがって，$\dfrac{\mathrm{B'P'}}{\mathrm{B'O}}\cdot\dfrac{\mathrm{B'Q'}}{\mathrm{B'A}}=\dfrac{1}{2}$ となるような m の値を求めればよい。

m の範囲は，A を通るとき $m=-\dfrac{1}{5}$，B を通るとき $m=\dfrac{2-1}{2-(-1)}=\dfrac{1}{3}$ より，$-\dfrac{1}{5}\leq m<\dfrac{1}{3}$

このとき，

P’の座標は，$y=mx+m+1$ と $y=x$ の連立方程式を解くことにより，P’$\left(-\dfrac{m+1}{m-1},\ 0\right)$

Q’の座標は，$y=mx+m+1$ と $y=-x+4$ の連立方程式を解くことにより，Q’$\left(\dfrac{-m+3}{m+1},\ 0\right)$

また，B’$(2,\ 0)$

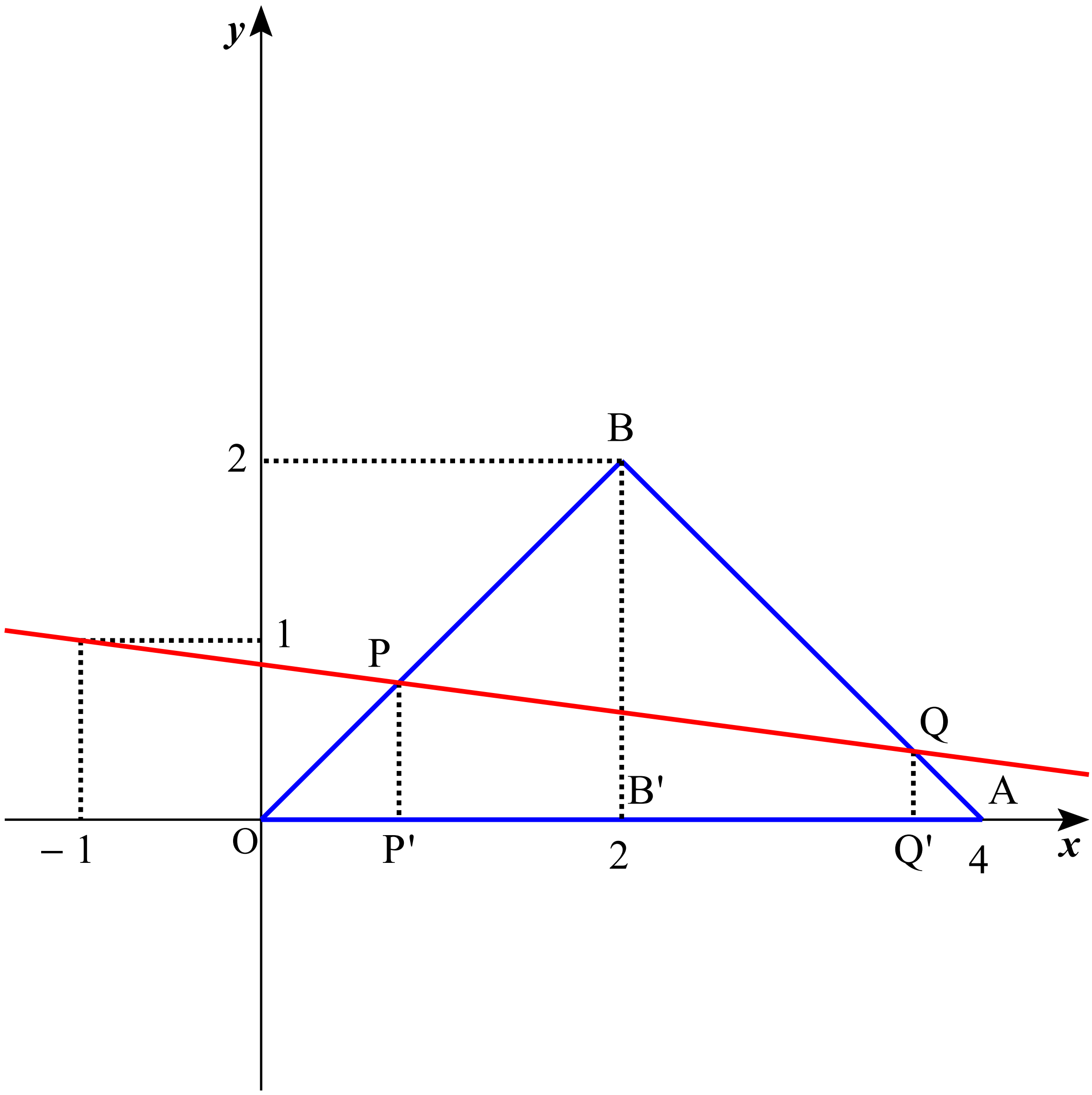
よって，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{B'P'}}{\mathrm{B'O}}\cdot\frac{\mathrm{B'Q'}}{\mathrm{B'A}}&=\frac{2-\left(-\dfrac{m+1}{m-1}\right)}{2}\cdot\frac{\dfrac{-m+3}{m+1}-2}{2}\\&=\frac{3m-1}{2(m-1)}\cdot\frac{-(3m-1)}{2(m+1)}\\&=\frac{-9m^2+6m-1}{4m^2-4}\end{aligned}$$

これと $\dfrac{\mathrm{B'P'}}{\mathrm{B'O}}\cdot\dfrac{\mathrm{B'Q'}}{\mathrm{B'A}}=\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{-9m^2+6m-1}{4m^2-4}=\dfrac{1}{2}$

両辺に $4m^2-4$ を掛け，整理すると，$11m^2-6m-1=0$

解の公式および $-\dfrac{1}{5}\leq m<\dfrac{1}{3}$ より，$m=\dfrac{3-2\sqrt{5}}{11}$


y
B
2
1
P
Q
B'
A
− 1
O
P'
2
Q'
4
x

183

$\angle$ATB が直角のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BT}}=0$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\begin{pmatrix} t+2 \\ t^2-4 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{BT}}=\begin{pmatrix} t-b \\ t^2-b^2 \end{pmatrix}$ より，$(t+2)(t-b)+(t^2-4)(t^2-b^2)=0$

これを整理すると，$(t+2)(t-b)\{t^2+(b-2)t-2b+1\}=0$

これと，$-2<t<b$ より，$t^2+(b-2)t-2b+1=0$

よって，$t^2+(b-2)t-2b+1=0$ が $-2<t<b$ において少なくとも 1 つの解をもつような b の範囲を求めればよい。

そこで，$f(t)=t^2+(b-2)t-2b+1$ とおき，放物線 $f(t)$ が $-2<t<b$ において t 軸と少なくとも 1 つの共有点をもつような b の範囲を求める。

求め方 1　共有点の個数で分類

(a) $-2<t<b$ に 2 つの共有点（接する場合を含む）をもつときの b の範囲

$$f(t)=t^2+(b-2)t-2b+1=\left(t+\frac{b-2}{2}\right)^2-\frac{b(b+4)}{4}$$ より，

軸 $t=-\dfrac{b-2}{2}$ について

$-2<-\dfrac{b-2}{2}<b$ より，$\dfrac{2}{3}<b<6$　・・・①

頂点の $f(t)$ すなわち $f\left(-\dfrac{b-2}{2}\right)=-\dfrac{b(b+4)}{4}$ について

$f\left(-\dfrac{b-2}{2}\right)\leq 0$ より，$b(b+4)\geq 0$　$\therefore b\leq -4,\ 0\leq b$　・・・②

$f(-2)=-4b+9$ および $f(b)=2b^2-4b+1$ について

$f(-2)>0$ かつ $f(b)>0$ より，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{9}{4}$　・・・③

よって，$-2<t<b$ に 2 つ共有点をもつときの b の範囲は，

①かつ②かつ③より，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{9}{4}$　・・・④

(b) $-2<t<b$ に 1 つの共有点をもつときの b の範囲

$f(-2)=0,\ f(b)=0,\ f(-2)\cdot f(b)<0$ の 3 つの場合に分けて b の範囲を求める。

(b-1) $f(-2)=0$ のとき

$t^2+(b-2)t-2b+1=0$ のもう 1 つの解を α とすると，解と係数の関係より，

$-2+\alpha=-(b-2)$　$\therefore \alpha=-b+4$　・・・⑤

$f(-2)=-4b+9=0$ より，$b=\dfrac{9}{4}$　・・・⑥

⑥を⑤に代入し，もう 1 つの解 α を求めると，$\alpha=-\frac{9}{4}+4=\frac{7}{4}$ ・・・⑦

⑥，⑦より，$-2<\alpha<b$ が成り立つ。

よって，⑥のとき，$-2<t<b$ に 1 つの共有点をもつ。

(b-2) $f(b)=0$ のとき

$t^2+(b-2)t-2b+1=0$ のもう 1 つの解を β とすると，解と係数の関係より，

$b+\beta=-(b-2)$　$\therefore \beta=-2b+2$ ・・・⑧

$f(b)=2b^2-4b+1=0$ より，$b=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ ・・・⑨

⑧，⑨より，$(b,\ \beta)=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}\right),\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right)$

よって，$-2<\beta<b$ が成り立つ b は $b=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ・・・⑩

(b-3) $f(-2)f(b)<0$ のとき

$f(t)$ は連続で，（$f(-2)<0$ かつ $f(b)>0$）または（$f(-2)>0$ かつ $f(b)<0$）だから，

中間値の定理より，$-2<t<b$ に 1 つの共有点をもつ。

よって，$f(-2)f(b)=(-4b+9)(2b^2-4b+1)<0$ を解くことにより，

$\frac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ または $\frac{9}{4}<b$ ・・・⑪

以上より，b は④，⑥，⑩，⑪のいずれかを満たせばよい。

よって，$b>\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

求め方 2　軸の位置で分類

$f(t)=t^2+(b-2)t-2b+1=\left(t+\frac{b-2}{2}\right)^2-\frac{b(b+4)}{4}$ より，軸 $t=-\frac{b-2}{2}$

そこで，$f(t)$ を軸の位置で分類し，それぞれの場合において，$-2<t<b$ に共有点をもつような b の範囲を求める。

(i) $-\frac{b-2}{2}\leq -2$ のとき

$-\frac{b-2}{2}\leq -2$ を解くと，$b\geq 6$ ・・・①

$f(-2)=-4b+9<0$ かつ $f(b)=2b^2-4b+1>0$ より，

$b>\frac{9}{4}$ かつ（$b<\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ または $\frac{2+\sqrt{2}}{2}<b$）　$\therefore b>\frac{9}{4}$ ・・・②

①かつ②より，$b\geq 6$

(ii) $-2<-\dfrac{b-2}{2}<b$ のとき

$-2<-\dfrac{b-2}{2}<b$ を解くと，$\dfrac{2}{3}<b<6$　・・・③

頂点の $f(t)$ すなわち $f\left(-\dfrac{b-2}{2}\right)=-\dfrac{b(b+4)}{4}$ について

$f\left(-\dfrac{b-2}{2}\right)\leq 0$ より，$b(b+4)\geq 0$　$\therefore b\leq -4,\ 0\leq b$　・・・④

$f(-2)=-4b+9$ および $f(b)=2b^2-4b+1$ について

$f(-2)=-4b+9>0$ または $f(b)=2b^2-4b+1>0$

これと $b>-2$ より，

$-2<b<\dfrac{9}{4}$ または（$-2<b<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ または $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}<b$）　すなわち $b>-2$　・・・⑤

③かつ④かつ⑤より，$\dfrac{2}{3}<b<6$

(iii) $b\leq -\dfrac{b-2}{2}$ のとき

$b\leq -\dfrac{b-2}{2}$ を解くと，$b\leq\dfrac{2}{3}$

これと $b>-2$ より，$-2<b\leq\dfrac{2}{3}$　・・・⑥

$f(-2)=-4b+9>0$ かつ $f(b)=2b^2-4b+1<0$ より，$b<\dfrac{9}{4}$ かつ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$　・・・⑦

⑥かつ⑦より，$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b\leq\dfrac{2}{3}$　・・・⑧

以上より，b は①，③，⑧のいずれかを満たせばよい。

よって，$b>\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$